פרק ט': סודרים כעוצמות (גרסה 3, 8.1.2005)

161. **הגדרה**. בשם **סודר מונה** נקרא לסודר שאינו שווה עוצמה לאף סודר קטן ממנו.

162. **משפט**. כל סודר α שווה עוצמה לסודר מונה β יחיד, $\beta \leq \alpha$.
הוכחה. יהי β הסודר המזערי שהוא שווה עוצמה ל-α. מכיוון ש- α שווה עוצמה לעצמו קיים סודר β כזה והוא קטן או שווה ל-α. β הוא סודר מונה, כי אילו הוא היה שווה עוצמה ל- $\gamma < \beta$ אז גם γ היה שווה עוצמה ל-α, בניגוד למזעריות β.

163. **משפט**. א. כל סודר סופי הוא סודר מונה.
ב. ω הוא סודר מונה.
ג. כל סודר מונה אינסופי הוא גבולי.
הוכחה. א. אם n סודר סופי ו-$\beta < n$ אז $\beta \subsetneq n$. n הוא קבוצה סופית, ולפי 32א' הוא אינו שווה עוצמה לקבוצה חלקית ממש שלו ולכן אינו שווה עוצמה ל-β.
ב. לפי 38 ω היא קבוצה אינסופית בעוד שכל סודר קטן מ-ω הוא סודר סופי ועל כן הוא קבוצה סופית, שלפי 30ב' אינה שוות עוצמה ל-ω.
ג. יהי α סודר עוקב אינסופי ונראה כי α אינו מונה. נניח כי $\alpha = s(\beta($, ואז גם β אינסופי, ולכן $\omega \leq \beta$, ולכן $\omega \subseteq \beta$. אם קבוצה A מקיפה קבוצה בת מניה אז לכל x $A \approx A \cup \{x\}$, ולכן $\alpha = s(\beta) = \beta \cup \{\beta\} \approx \beta$, ולכן α אינו מונה.

164. **מושג העוצמה**. אם אנו מניחים את אקסיומת הבחירה אז, לפי משפט הסדר הטוב, כל קבוצה A ניתנת לסידור היטב. מכיוון שקיימת העתקת דימיון בין קבוצה סדורה לבין טיפוס הסדר שלה לכן A שוות עוצמה לטיפוס הסדר שלה, ולכן גם לסודר המונה היחיד שטיפוס הסדר שווה עוצמה לו. לכן איננו זקוקים יותר לאקסיומות העוצמה אלא אנו יכולים להגדיר את העוצמה $|x|$ של קבוצה x כמונה הסודר היחיד שהוא שווה עוצמה ל-x, ועבור הגדרה זאת האקסיומות (1) ו-(2) של 61 ו-62 הן משפטים.
בהעדר אקסיומת הבחירה לא נוותר על אקסיומות העוצמה אלא נרחיב את (2) בכך שנאמר שאם x קבוצה הניתנת לסידור טוב (וזה שקול לכך ש-x היא שוות עוצמה לסודר כלשהו) אז $|x|$ הוא הסודר המונה שהוא שווה עוצמה ל-x.

165. **משפט**. אם α, β סודרים מונים, אז $\alpha < \beta$ כסודרים אמם $\alpha < \beta$ כמונים, כלומר אמם $\alpha \preceq \beta$ ו- $\alpha \not\approx \beta$
הוכחה. בכוון הלא טריביאלי, אם $\alpha \preceq \beta$ אז לא יתכן $\beta < \alpha$ כי אז היה $\beta \preceq \alpha$ ולכן גם $\beta \approx \alpha$, בניגוד להנחה ש-α סודר מונה.

166. **משפט**. לכל קבוצה A הסודר המזערי α המקיים $\alpha \not\preceq A$, וקיים כזה לפי 150, הוא סודר מונה. לכן לכל סודר β קיים סודר מונה α הגדול ממנו.
הוכחה. יהי $\alpha < \beta$, אז לפי מזעריות α קיים $\beta \preceq A$. אילו היה $\alpha \approx \beta$ היה גם $\alpha \preceq A$, בניגוד לבחירת A.

167. **משפט**. לכל קבוצה A של סודרים מונים החסם העליון $\bigcup A$ שלה הוא סודר מונה.
הוכחה. נסמן $\bigcup A = \alpha$. אם $\alpha \in A$ אז $\bigcup A = \alpha$ הוא כנדרש. אם $\alpha \notin A$, יהי $\beta < \alpha$ כלשהו ואז מכיוון ש-$\beta \in \alpha = \bigcup A$ קיים $\gamma \in A$ כך ש- $\beta \in \gamma$. אילו היה $\alpha \approx \beta$ אז היה $\gamma \preceq \alpha$ ומכיוון ש- $\gamma \subseteq \alpha$ אז, לפי משפט קנטור ברנשטיין היה $\gamma \approx \alpha$ ומכיוון ש- $\alpha \approx \beta < \gamma$ היה $\gamma \approx \beta$, בניגוד להנחה ש-γ הוא סודר מונה, בהיותו איבר של A.

168. **הגדרה**. נגדיר פונקציה א מהסודרים לסודרים המונים ברקורסיה כדלקמן: $\omega = \aleph_0$, לכל סודר α

$\aleph_{\alpha+1}$ הוא הסודר המונה העוקב ל- $\aleph_\alpha$ (קיים כזה לפי 166), ולכל סודר גבולי β $\aleph_\beta = \bigcup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ (זהו סודר מונה לפי 167).

המינוח הנוכחי שלנו הוא עקבי עם השימוש שלנו ב-$\aleph_0$ כעוצמה של הקבוצות בנות המנייה, כי כאן הגדרנו את $\aleph_0$ כ-ω ו-ω הוא הסודר המונה שהוא שווה עוצמה לכל קבוצה בת מניה.

169. **משפט**. א. תהי $F : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ פונקציה כך שלכל סודר α $F(\alpha+1) > F(\alpha)$ ולכל סודר גבולי β לכל $\alpha < \beta$ $F(\beta) \geq F(\alpha)$ אז F פונקציה עולה.

ב. תהי $F : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ פונקציה עולה אז לכל סודר α קיים $F(\alpha) \geq \alpha$.

הוכחה. נוכיח באינדוקציה על γ כי אם $\alpha < \gamma$ אז $F(\alpha) < F(\gamma)$. אם γ עוקב יהי $\gamma = \beta + 1$. מכיוון ש- $\alpha < \gamma$ קיים $\alpha \leq \beta$ ולכן, לפי הנחת האינדוקציה ולפי הנחתנו, $F(\alpha) \leq F(\beta) < F(\gamma)$. אם γ גבולי אז גם $\alpha + 1 < \gamma$, ולכן לפי הנחתנו על F, $F(\alpha) < F(\alpha+1) \leq F(\gamma)$.

ב. באינדוקציה על α. ל- $0 = \aleph$ ברור כי $F(0) \geq 0$. ל- $\alpha = \beta + 1$ קיים, לפי הנחת האינדוקציה, $F(\alpha) > F(\beta) \geq \beta$, ומכיוון ש- α הוא הסודר העוקב ל-β לכן $F(\alpha) \geq \alpha$. ל-α גבולי קיים, לפי הנחת האינדוקציה, לכל $\beta < \alpha$ $F(\alpha) > F(\beta) \geq \beta$. כך $F(\alpha) \supseteq \alpha$ ולכן $F(\alpha) \geq \alpha$.

170. **מסקנה**. א. $\aleph$ היא פונקציה עולה.

ב. לכל סודר α, $\aleph_\alpha \geq \alpha$.

171. **משפט**. טווח $\aleph$ הוא מחלקת כל הסודרים המונים האינסופיים.

הוכחה. יהי γ סודר מונה אינסופי. לפי 170ב' $\gamma \geq \aleph_\gamma$, לכן קיים סודר β מזערי כך ש- $\gamma \geq \aleph_\beta$. אם $\beta = 0$ פירושו של דבר הוא כי $\gamma = \aleph_0 \leq \omega$, ומכיוון ש-$\gamma$ אינסופי $\gamma = \omega$ וכך $\gamma = \aleph_0 \in \mathrm{Range}(\aleph)$. אם $\beta = \alpha + 1$ אז לפי הגדרת β קיים $\gamma > \aleph_\alpha$ ולפי הגדרת $\aleph_{\alpha+1}$ זהו הסודר מונה המזערי הגדול מ-$\aleph_\alpha$ ולכן $\gamma \leq \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\beta$. מכיוון שלפי בחירת β $\gamma \geq \aleph_\beta$ לכן $\gamma = \aleph_\beta \in \mathrm{Range}(\alpha)$. אם β גבולי אז לפי בחירת β קיים לכל $\alpha < \beta$ $\gamma > \aleph_\alpha$, ולכן $\gamma \leq \aleph_\beta = \bigcup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \beta\}$. לכן $\gamma = \aleph_\beta \in \mathrm{Range}(\aleph)$.

172. **משפט**. לכל α $\aleph_a = \aleph_\alpha + \aleph_\alpha$, ובמילים אחרות, $\aleph_\alpha \cdot 2 = \aleph_\alpha$.

הערה. משפט זה נובע בקלות ממשפט 174, והוכחתו מובאת כאן רק כמבוא דידקטי להוכחת 174.

הוכחה. באינדוקציה על α. נסדר את הקבוצה $\aleph_\alpha \times 2$ בסדר מילוני שמאלי. זהו סדר טוב, כי הוא סדר מילוני של מכפלה קרטזית של שתי קבוצות סדורות היטב. נראה שטיפוס הסדר γ של קבוצה זאת הוא $\aleph_\alpha$, ומכיוון ש-$\aleph_\alpha$ הוא סודר מונה גם העוצמה של קבוצה זאת היא $\aleph_\alpha$. מכיוון ש- $|\gamma| = |\aleph_\alpha \times 2| \geq |\aleph_\alpha| = \aleph_a$ אז $\gamma \geq \aleph_\alpha$. נוכיח עתה כי גם $\gamma \leq \aleph_\alpha$ וזה נותן $\gamma = \aleph_\alpha$ כנדרש. אנו נוכיח כי $\gamma \leq \aleph_\alpha$ ע"י שנראה שלכל $\delta < \gamma$ $\delta < \aleph_\alpha$.

תהי F העתקת הדימיון של $\aleph_\alpha \times 2$ על γ. יהי $\delta < \gamma$, אז $\delta = F(\beta, i)$ היכן ש- $\beta < \aleph_\alpha$ ו- $i < 2$. תהי W קבוצת הזוגות הקודמים לזוג $\langle \beta, i \rangle$ בסדר המילוני. היות ו-F היא שומרת סדר והיא על γ לכן $F \restriction W$ היא העתקה חח"ע של W על δ. נראה כי $|W| < \aleph_\alpha$, ואז נדע כי גם $\delta < \aleph_\alpha$. ברור כי $W \subseteq s(\beta) \times 2$. אם β סופי אז גם W סופית וקיים $|W| < \omega \leq \aleph_\alpha$. אם β אינסופי אז מכיוון ש- $\beta < \aleph_\alpha$ ו-$\aleph_\alpha$ סודר גבולי, לפי 163ג', גם $s(\beta) < \aleph_a$ ו- $s(\beta)$ אינסופי ולכן $|s(\beta)| = \aleph_\lambda$ עבור $\lambda < \alpha$ מסויים. מכיוון ש- $W \subseteq s(\beta) \times 2$ לכן $|W| \leq |s(\beta)| \cdot 2 = \aleph_\lambda \cdot 2$. לפי הנחת האינדוקציה $\aleph_\lambda \cdot 2 = \aleph_\lambda$, לכן $|W| < \aleph_\alpha \leq \aleph_\lambda$. כך, בכל מקרה, $|W| < \aleph_\alpha$ כנדרש.

173. **מסקנה**. לכל α, β $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$.

174. **משפט**. לכל α $\aleph_a = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha$, ובמילים אחרות, $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$.

הוכחה. הוכחה זאת דומה מאוד להוכחה של 172, רק שאנו עוסקים בקבוצה $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ ומסדרים אותה בסדר מתאים.

את $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ נסדר כך ש- $\langle \rho, \sigma \rangle < \langle \rho', \sigma' \rangle$ אם $\max(\rho, \sigma) < \max(\rho', \sigma')$ או אם $\max(\rho, \sigma) = \max(\rho', \sigma')$ והזוג $\langle \rho, \sigma \rangle$ קודם לזוג $\langle \rho', \sigma' \rangle$ בסדר המילוני השמאלי. קל לראות כי יחס זה הוא יחס סדר טוב. די לנו להראות שטיפוס הסדר γ של $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ הוא $\aleph_\alpha$. מכיוון ש- $\aleph_a = |\aleph_\alpha| \geq |\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = |\gamma|$ אז $\gamma \geq \aleph_\alpha$. כדי לקבל את $\gamma = \aleph_\alpha$ נוכיח עתה כי גם $\gamma \leq \aleph_\alpha$, ונעשה זאת ע"י שנראה שלכל $\delta < \gamma$ $\delta < \aleph_\alpha$.

תהי F העתקת הדימיון של $\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha$ על γ. יהי $\delta < \gamma$, אז $\delta = F(\beta_1, \beta_2)$ היכן ש- $\beta_1, \beta_2 < \aleph_\alpha$. תהי W קבוצת הזוגות הקודמים לזוג $\langle \beta_1, \beta_2 \rangle$ בסדר המילוני. היות ו-F היא שומרת סדר והיא על לכן $F \restriction W$ היא העתקה חח"ע של W על δ. נראה כי $|W| < \aleph_\alpha$, ואז נדע כי גם $\delta < \aleph_\alpha$. יהי $\beta = \max(\beta_1, \beta_2)$, ברור כי $W \subseteq s(\beta) \times s(\beta)$. אם β סופי אז גם W סופית וקיים $\omega \leq \aleph_\alpha$ $|W| < \omega$. אם β אינסופי אז מכיוון ש- $\beta < \aleph_\alpha$ ו-$\aleph_\alpha$ סודר גבולי, לפי 163ג', גם $s(\beta) < \aleph_a$ ו- $s(\beta)$ אינסופי ולכן $|s(\beta)| = \aleph_\lambda$ עבור $\lambda < \alpha$ מסויים. מכיוון ש- $W \subseteq s(\beta) \times s(\beta)$ לכן $\aleph_\lambda \cdot \aleph_\lambda = |s(\beta)| \cdot |s(\beta)| \leq |W|$. לפי הנחת האינדוקציה $\aleph_\lambda \cdot \aleph_\lambda < \aleph_\alpha$, לכן $|W| < \aleph_\alpha$. כך, בכל מקרה, $|W| < \aleph_\alpha$ כנדרש.

175. **מסקנה**. לכל α, β $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$.

לאור מה שאמרנו ב-164 תוצאה מאקסיומת הבחירה היא שכל עוצמה אינסופית a היא $\aleph_\alpha$ עבור α כלשהו ולכן 174 אומר שלכל עוצמה אינסופית a קיים $a^2 = a$. את הכוון ההפוך נותן המשפט הבא.

176. **משפט**. אם לכל מונה אינסופי a קיים $a^2 = a$ אז קיים משפט הסדר הטוב, ולכן קיימת אקסיומת הבחירה.

הוכחה. תהי B קבוצה כלשהי, נראה כי אפשר לסדר אותה היטב. נסמן $b = |B|$. לפי משפט הרטוגס, 150 , קיים סודר γ כך ש- $\gamma \not\preceq B$, ואז ברור שקיים γ אינסופי כזה. יהי γ הסודר האינסופי המזערי המקיים $\gamma \not\preceq B$. כמו ב-166, γ זה הוא סודר מונה אינסופי, ולכן נסמנו ב- $\aleph_\beta$. לפי הנחת המשפט, עבור $a = b + \aleph_\beta$, קיים $(b + \aleph_\beta)^2 = b + \aleph_\alpha$, ולכן $b^2 + 2 \cdot b \cdot \aleph_\beta + \aleph_\beta^2 = b + \aleph_\alpha$, ומכאן $b \cdot \aleph_\beta \leq b + \aleph_\beta$. לכן $\aleph_\alpha \preceq B \cup \aleph_\beta \times B$, ותהי $F : B \times \aleph_\beta \to B \cup \aleph_\beta$ חח"ע. לא קיים $x \in B$ כך ש- $F[\{x\} \times \aleph_\beta] \subseteq B$ כי אז היה $\aleph_\beta \approx \{x\} \times \aleph_\beta \preceq B$, בניגוד לבחירת $\aleph_\beta$. לכן לכל $x \in B$ קיים $\delta \in \aleph_\beta$ כך ש- $F(x, \delta) \in \aleph_\beta$, נסמן את ה-$\delta$ המזערי הזה ב- δ_x, נגדיר את $G : B \to \aleph_\beta$ ע"י $G(x) = F(x, \delta_x)$. מכיוון ש-F חח"ע גם G כן, ולכן $\aleph_\beta \preceq B$. כך הסדר הטוב של $\aleph_\beta$ משרה סדר טוב על B.